OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-18 februarie 2012

Clasa a IX-a

Problema I.

a) (6p) Demonstrați că $3a^2 - 2a + 3 \geq \frac{8}{3}$, pentru orice număr real a.

b) (14p) Determinați numerele reale x şi y cu proprietatea că

$$\left(x^2 - x + 1\right) \cdot \left(3y^2 - 2y + 3\right) - 2 = 0 .$$

Problema II. Se consideră progresia aritmetică $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

a) (10p) Demonstrați că şirul $b_n = 2^{a_n}$ este o progresie geometrică.

b) (10p) Arătați că $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + ... + a_{2011}^2 - a_{2012}^2 = \frac{1006}{2011} \cdot \left(a_1^2 - a_{2012}^2\right)$.

Problema III.(20p)

Fie numărul real x astfel încât $x^2 - x \in \mathbb{Q}$ şi $x^3 \in \mathbb{Q}$. Demonstrați că $x \in \mathbb{Q}$.

Problema IV.

a) (15p) Demonstrați relația lui Sylvester: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$, unde O şi H sunt central cercului circumscris, respective ortocentrul triunghiului ABC.

b) (15p) Fie ABCD un patrulater convex. Notăm cu H_A, respective H_C ortocentrele triunghiurilor BCD, respectiv ABD. Să se demonstreze că ABCD este patrulater inscriptibil dacă şi numai dacă avem $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{H_C H_A}$